

Un théorème de Nakai-Moishezon pour certaines classes de type $(1,1)$

Philippe Eyssidieux

9 Novembre 1998

Abstract

Let X be a smooth compact projective variety over \mathbb{C} .

Let $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1}$ be the intersection of $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ with the image of the map $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X)$ induced by the classifying map $X \rightarrow B\pi_1(X)$. Let $NS(X)$ be the Néron-Severi group of X .

Let $[\omega] \in H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{R}$. In this note, we prove that $[\omega]$ is the cohomology class of a Kähler metric if and only if for every d -dimensional reduced closed algebraic subvariety $Z \subset X$, $[\omega]^d.Z > 0$.

Un résultat classique de Harvey et Lawson [10] affirme que, si (M, ω_M) est une variété Kählerienne connexe avec $\dim(M) = d$, une classe $\alpha \in H^{1,1}(M)$ est une classe de Kähler ssi $\alpha.\omega_M^{d-1} > 0$ et pour tout $(d-1, d-1)$ -courant positif dd^c -fermé T $\alpha.T > 0$.

Les cycles utilisés pour tester l'amplitude sont juste dd^c -fermés, ce qui contraste avec le classique théorème de Nakai-Moishezon et son extension aux diviseurs réels [2]. Le résultat de [2] est le suivant: Soit X une variété compacte projective sur \mathbb{C} . Soit $NS(X)$ le groupe de Néron-Severi de X . toute classe $[\omega] \in NS(X) \otimes \mathbb{R}$ vérifiant $[\omega]^d.Z > 0$ pour tout sous espace analytique Z réduit de dimension d de X est une classe de Kähler.

Le contraste entre ces deux résultats est frappant et laisse ouverte la possibilité de théorèmes de type Nakai-Moishezon pour des classes de cohomologie réelles arbitraires. La question qui motive cette recherche est la suivante. Est-il vrai que toute classe $[\omega]$ de type $(1,1)$ sur une variété projective algébrique X vérifiant $[\omega]^d.Z > 0$ pour tout sous espace analytique Z de dimension d de X est une classe de Kähler?

Un résultat récent de A. Lamari -et indépendamment N. Buchdahl-, annoncé dans [14] et basé sur une exploitation astucieuse de [10], l'affirme quand X est une surface.

Soit X une variété projective algébrique complexe. On note $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1}$ l'intersection de $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ avec l'image de l'application $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ induite par l'application classifiante $X \rightarrow B\pi_1(X)$.

2 Un théorème de Nakai-Moishezon

Définissons $\overline{H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{R}}$ comme le \mathbb{R} -vectoriel formé des classes de type $(1,1)$ ω sur X telles qu'il existe une famille projective lisse sur un polydisque $\Xi \rightarrow \Delta$ avec $\Xi_0 = X$, une famille continue $(\omega_t)_{t \in \Delta}$ de classes de type $(1,1)$ avec $\omega_0 = \omega$ et une suite t_n avec $t_n \rightarrow 0$ telles que $\omega_{t_n} \in NS(\Xi_{t_n}) \otimes \mathbb{R} + H^2(\pi_1(\Xi_{t_n}), \mathbb{R})^{1,1}$.

Théorème 1 *Soit X une variété complexe projective lisse compacte.*

Soit $[\omega] \in \overline{H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{R}}$. $[\omega]$ est la classe de cohomologie d'une métrique de Kähler ssi pour chaque sous espace algébrique d -dimensionnel réduit $Z \subset X$, $[\omega]^d \cdot Z > 0$.

Les techniques standard de recollement et régularisation de courants rappelées dans la section 1.3 réduisent, par récurrence sur la dimension de X , la question à montrer que la classe $[\omega]$ est big et vérifie le lemme de Kodaira, c'est à dire peut être représentée par un courant strictement positif fermé à singularités logarithmiques.

L'hypothèse $[\omega] \in \overline{H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{R}}$ signifie que la classe $[\omega]$ est limite de la première classe de Chern d'une suite de fibrés linéaires holomorphes définis sur le revêtement universel de X et sur lesquels agit une extension idoine de $\pi_1(X)$ par S^1 . Que $[\omega]$ est big s'obtient de façon très classique en utilisant une adaptation développée dans [8] du théorème d'indice L_2 d'Atiyah [1] qui donne des techniques cohomologiques d'étude des groupes de sections L_2 de tels fibrés.

Un exemple dû à R. Livne [15], montre qu'il existe une surface projective S uniformisée par l'espace hyperbolique complexe (i.e.: $c_1^2(S) = 3c_2(S)$) avec $\overline{NS(S) \otimes \mathbb{R}} = NS(S) \otimes \mathbb{R} \neq H^{1,1}(S)$ (la première égalité vient du fait que S est rigide.). Pourtant notre caractérisation du cône Kählerien s'applique à S puisque c'est un $K(\pi, 1)$, ce qui implique que $H^{1,1}(S, \mathbb{R}) = H^2(\pi_1(S), \mathbb{R})^{1,1}$.

Je remercie M. Paun pour d'utiles discussions concernant les techniques de régularisation et recollement de courants.

1 Courants quasipositifs et métriques singulières pour les espace complexes réduits

1.1 Courants sur un espace complexe réduit

Soit (S, O_S) un espace complexe réduit. Narasimhan définit le faisceau $\mathcal{PSH} \cap C^0$ des fonctions plurisousharmoniques continues de (S, O_S) , comme suit: une fonction continue est plurisousharmonique s'il existe un recouvrement de S par des ouverts de cartes $(U_i)_i$ munis de plongements $U_i \subset \mathbb{C}^{N_i}$ tels que ϕ_{U_i} est la restriction à U_i d'une fonction plurisousharmonique con-

tinue sur un voisinage de U_i dans \mathbb{C}^{N_i} . Que cette définition est consistante est démontré dans [16].

De la même façon, on définit le faisceau $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ des fonctions lisses réelles, le faisceau $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ des fonctions pluriharmoniques réelles, le faisceau \mathcal{PSH} des fonctions plurisousharmoniques (on demande que ϕ soit semi continue supérieurement et que pour toute composante irréductible locale T $\phi_T \not\equiv -\infty$), le faisceau des fonctions psh lisses $\mathcal{PSH} \cap C^{\infty}$, le faisceau $\mathcal{QPSH} = \mathcal{PSH} + C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ des fonctions quasi psh.

[16] définit aussi le faisceau \mathcal{SPSH} des fonctions strictement plurisousharmoniques comme étant le faisceau des fonctions ϕ telles pour toute fonction continue f il existe $\epsilon > 0$ tel que $\phi + \epsilon f$ soit psh. Les fonctions strictement psh lisses sont localement les restrictions par un plongement de fonctions lisses dont la forme de Levi est supérieure à une forme de Kähler.

Soit F un faisceau en \mathbb{R} -vectoriels et G un sous faisceau en \mathbb{R} -vectoriels. Soit $K \subset F$ un sous faisceau d'ensembles, G -invariant. On note K/G l'image faisceautique de K dans F/G .

Une *métrique Kählérienne* sur (S, O_S) est une section globale de $\mathcal{SPSH} \cap C_{\mathbb{R}}^{\infty} / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Un *courant lisse* est une section globale de $C_{\mathbb{R}}^{\infty} / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Un *courant big* est une section globale de $\mathcal{SPSH} / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Un *courant psef* est une section globale de $\mathcal{PSH} / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Un *courant quasi-positif* est une section globale de $\mathcal{QPSH} / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

Soient T un courant quasi-positif et γ un courant lisse. Par définition, $T \geq \gamma$ ssi $T - \gamma$ est psef.

Par analogie avec les notations habituelles, on notera par dd^c l'application naturelle $C_{\mathbb{R}}^{\infty} \rightarrow C_{\mathbb{R}}^{\infty} / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

1.2 Métriques singulières

On a des applications $H^0(S, \Phi / \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ surjectives quand $\Phi = C^{\infty}$, \mathcal{QPSH} , d'images le *cône Kähler* quand $\Phi = \mathcal{SPSH} \cap C^{\infty}$, le *cône big* quand $\Phi = \mathcal{SPSH}$.

Soit L un fibré holomorphe en droites. $O_S(L)$ est un faisceau inversible. Une *métrique hermitienne singulière* sur L est une application h de l'espace total L dans $[0, \infty[$ qui sur chaque fibre est une métrique hermitienne possiblement nulle s'écrivant localement $h = e^{-\phi}$ avec ϕ quasi psh. Soit h une métrique singulière sur L . La collection des potentiels locaux ϕ de h définit un courant quasi positif qu'on est en droit d'appeler $C_1(L, h)$. La classe de $C_1(L, h)$ dans $H^1(S, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ ne dépend que de L .

Si S est compact $H^1(S, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ est un \mathbb{R} -vectoriel de dimension finie.

1.3 Lemme de recollement

Soit (S, O_S) un espace complexe réduit compact et ω_S une forme de Kähler sur S ¹.

Le lemme de régularisation de Richberg [19] et le lemme de recollement de Paun [17] sont tous les deux valides pour les espaces complexes réduits, par la preuve originelle:

Lemme 1 *Soit T un courant quasipositif sur S , section globale de $\mathcal{QPSH} \cap C^0/\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ et γ un courant lisse avec $T \geq \gamma$.*

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un représentant lisse T_ϵ de $[T]$ avec $T_\epsilon \geq \gamma - \epsilon\omega_S$.

Lemme 2 *Soit $Z \subset S$ un sous espace complexe compact. Soient α, γ deux courants lisses sur S .*

Soit ϕ_1 une fonction quasi psh sur S lisse hors de Z et ϕ_2 une fonction lisse dans un ouvert U contenant Z . On suppose $\alpha + dd^c\phi_1 \geq \gamma$ sur S et $\alpha|_U + dd^c\phi_2 \geq \gamma|_U$.

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\phi_\epsilon \in C^\infty(S)$ tel que $\alpha + dd^c\phi_\epsilon \geq \gamma - \epsilon\omega_S$.

Le lemme suivant est une conséquence directe de la preuve de [3], Theorem 4, p. 285 (voir aussi [17], lemme 1).

Lemme 3 *Soit $Z \subset S$ un sous espace complexe compact. Soient α, γ deux courants lisses sur S . On suppose que $[\alpha|_Z] \in H^1(Z, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ possède un représentant lisse α_Z tel que $\alpha_Z \geq \gamma|_Z$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert U de Z dans S et $\phi_U \in C^\infty(U)$ tel que $\alpha|_U + dd^c\phi_U \geq \gamma|_U - \epsilon\omega_S|_U$.*

Preuve Puisque [4] et [17] ne forment pas les choses de cette façon, reconstituons l'argument.

On peut supposer que $\alpha|_Z = \alpha_Z$.

Considérons une chaîne de sous espaces analytiques compacts de S $\emptyset = Z_{-1} \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_N = Z$ avec $Sing(Z_i) \subset Z_{i-1}$.

Supposons, par récurrence, construits ϕ_i une fonction lisse sur S et V_i voisinage de Z_i tels que:

$$(\alpha + dd^c\phi_i)|_{V_i} \geq (\gamma - \frac{\epsilon}{2^{k-i}}\omega_S)|_{V_i}$$

$$(\alpha + dd^c\phi_i)|_Z \geq (\gamma - \frac{\epsilon}{2^{k-i}}\omega_S)|_Z$$

¹On peut formuler une variante sans supposer que S est un espace Kählérien.

Soient U un ouvert de S ne reconstruant pas Z_{i+1} et (V_λ, U_λ) une famille finie de cardinal Λ d'ouverts de S telle que $V_\lambda \subseteq U_\lambda$, $\mathfrak{V} = (V_\lambda)_\lambda \cup V_i \cup U$ est un recouvrement ouvert de S et il existe des plongements $i_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{C}^{N_\lambda}$ avec

$$Z_{i+1} \cap U_\lambda = i_\lambda^{-1}(\{z_1 = 0, \dots, z_{N_\lambda-d} = 0\})$$

Soit f_λ une fonction lisse sur S à valeurs dans $C^{N_\lambda-d}$ coïncidant avec $(i_\lambda^* z_k)_{k=1}^{N_\lambda-d}$ sur V_λ . Soit $((\theta_\lambda)_\lambda, \theta_i, \theta'_i)$ une partition de l'unité lisse subordonnée à \mathfrak{V} .

Pour $1 \gg \eta > 0$, déterminé durant la preuve, on pose:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \sum_{\lambda} \theta_\lambda \eta^3 \log(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2)$$

$dd^c(\theta_\lambda \log(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2))$ est somme de quatre termes. Le premier terme $dd^c(\theta_\lambda) \log(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2)$ est borné par $M \cdot \omega_S$, le second $d\theta_\lambda \wedge 2(d^c f_\lambda, f_\lambda)/(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2)$ est borné par $M \eta^{-2} \omega_S$ (M est une constante positive assez grande.). Le troisième terme est similaire au second.

Le quatrième terme $\theta_\lambda dd^c \log(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2)$ est positif.

Quitte à diminuer η , sur $W_i = \{\theta_i > 1/3\}$, on a bien $\alpha + dd^c \phi_{i+1} \geq \gamma - \epsilon/2^{k-1-i} \omega_S$ et $(\alpha + dd^c \phi_{i+1})_Z \geq (\gamma - \epsilon/2^{k-1-i} \omega_S)_Z$.

Par ailleurs si $s \in Z_{i+1} \cap \{\theta_i \leq 1/2\}$ on peut choisir λ tel que $\theta_\lambda > 1/3\Lambda$ près de s . Par hypothèse on a, près de s , pour C une constante positive:

$$\alpha + dd^c \phi_i - \gamma \geq -\frac{\epsilon}{2^{k-i}} \omega_S - C(idf_\lambda \wedge d\bar{f}_\lambda)$$

Quitte à diminuer encore η on peut supposer que, dans l'ouvert V_s contenant s :

$$\frac{1}{3\Lambda} \eta^3 dd^c \log(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2) = \eta^{-1} \frac{(idf_\lambda \wedge d\bar{f}_\lambda)}{3\Lambda(1 + \eta^{-4} |f_\lambda|^2)^2} \geq C(idf_\lambda \wedge d\bar{f}_\lambda)$$

On peut choisir s_1, \dots, s_M tel que $(V_{s_i})_i$ est un recouvrement ouvert de $Z_{i+1} \cap \{\theta_i \leq 1/2\}$ et par suite η tel que sur $V_{i+1} = \{\theta_i > 1/3\} \cup V_{s_1} \cup \dots \cup V_{s_M}$:

$$(\alpha + dd^c \phi_{i+1})_{V_{i+1}} \geq (\gamma - \frac{\epsilon}{2^{k-1-i}} \omega_S)|_{V_{i+1}}$$

Ceci conclut la preuve du lemme 3.

Le lemme suivant est d'une utilité évidente dans les questions de type Nakai-Moishezon:

Lemme 4 *Soit (S, O_S) un espace complexe compact Kählerien. Soit $[\omega] \in H^1(S, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$. On suppose que $[\omega]$ est représentée par un courant big qui est lisse en dehors d'un ensemble analytique propre E et que $[\omega|_E] \in H^1(E, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ est dans le cône Kähler de E . Alors $[\omega]$ est dans le cône Kähler de S .*

Preuve Conséquence immédiate des lemmes 2 et 3 .

Parmi les techniques de régularisation et de recollement de courants quasi positifs développées par Demailly [4],[5],[17], seul le difficile théorème de régularisation [4] et ses conséquences ne s'étendent pas immédiatement au cas d'une base singulière. Il est néanmoins naturel de conjecturer une version singulière de [4].

2 Cohomologie l_2 des faisceaux périodiques

2.1 Faisceaux analytiques cohérents périodiques sur un revêtement galoisien infini d'une variété algébrique

Soit Σ la donnée d'un groupe discret Γ opérant proprement discontinuellement par biholomorphismes sur un espace complexe analytique (S, O_S) . Σ_{red} désignera l'espace complexe réduit associé sur lequel Γ agit par biholomorphismes. Soit $\{1\} \rightarrow S^1 \rightarrow G \rightarrow \Gamma \rightarrow \{1\}$ une extension centrale de Γ par S^1 .

Un *faisceau analytique cohérent G -périodique* (en abrégé G -fac) sur le G -espace (S, O_S) est un faisceau analytique cohérent sur (S, O_S) muni d'un relèvement de l'action naturelle de G . Un *morphisme de G -fac* est un morphisme de faisceaux O_S -linéaire commutant à G .

Soit χ un caractère continu de S^1 . Un G, χ -fac est un G -fac F tel que, pour tout point s de S , l'action de S^1 sur l'espace F_s des germes en s de sections de F soit donnée par la caractère χ . La sous catégorie pleine de la catégorie des G -fac dont les objets sont les G, χ -fac est une catégorie abélienne $C_{G, \chi}(\Sigma)$.

Soit X une variété kählérienne et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel. Soit $[\omega] \in H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1}$ et ω une forme lisse fermée de bidegré $1, 1$ représentant cette classe de cohomologie. Il existe alors une extension centrale $\{1\} \rightarrow S^1 \rightarrow G \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \{1\}$ du groupe fondamental de X par S^1 , un fibré linéaire holomorphe $(\tilde{L}, \bar{\partial}, h)$ sur \tilde{X} et un relèvement à $(L, \bar{\partial}, h)$ de l'action de G sur \tilde{X} induite par l'action naturelle de $\pi_1(X)$ tels que la première forme de Chern-Weil de $(L, \bar{\partial}, h)$ soit ω [9], [6] . S^1 agit par le caractère χ . Le faisceau des sections $\mathcal{L} = O_{\tilde{X}}(\tilde{L})$ est un G, χ -fac sur \tilde{X} . Le foncteur $\pi^* \cdot \otimes \mathcal{L}^m$ donne une équivalence de catégories de la catégorie de faisceaux analytiques cohérents sur X vers $C_{G, \chi^m}(\tilde{X})$.

2.2 Foncteurs cohomologiques

On suppose S/Γ compact. Pour tout $p \in [1, \infty]$, il est possible de définir l'espace $H_p^0(\Sigma, \mathcal{F})$ des sections L^p d'un objet \mathcal{F} de $C_{G,\chi}(\Sigma)$, [7].

Il est également possible de prolonger cette définition en construisant des groupes de cohomologie $L_p H_p^q(\Sigma, \mathcal{F})$, nuls si $q \notin \{0, \dots, \dim S\}$.

Ces groupes de cohomologie s'organisent en un δ -foncteur cohomologique (voir [11] III.1, p.205), ce qui signifie qu'à toute suite exacte courte de $C_{G,\chi}(\Sigma)$ correspond une suite exacte longue de cohomologie L_p .

2.3 Théorie d'indice L_2 d'Atiyah

$H_p^q(\Sigma, \mathcal{F})$ est un G -module topologique, non nécessairement Hausdorff si $q \neq 0$. Quand $p = 2$, on peut de plus estimer la taille de ces groupes de cohomologie. En effet, le plus grand quotient Hausdorff de $H_2^q(\Sigma, \mathcal{F})$, $\bar{H}_2^q(\Sigma, \mathcal{F})$, est un objet d'une sous catégorie additive très particulière de la catégorie des représentations hilbertiennes de G , sur laquelle existe une fonction dimension \dim_G , vérifiant les propriétés usuelles de la fonction dimension en algèbre linéaire classique au détail près qu'elle est à valeurs réelles.²

Soit $f : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ un morphisme propre Γ -équivariant et $\mathcal{F} \in \text{Ob}C_{\bar{G}}(\Sigma')$. On dispose d'une suite spectrale de Leray-Serre qui donne lieu à la relation de dévissage:

$$\sum_q (-1)^q \dim_G \bar{H}_2^q(\Sigma', \mathcal{F}) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_G \bar{H}_2^p(\Sigma, R^p f_* \mathcal{F})$$

Cette relation donne lieu à une procédure de calcul de l'invariant $\chi_2(\Sigma, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\dim S} \dim_G \bar{H}_2^i(\Sigma, \mathcal{F})$ par récurrence sur la dimension d du support de $\mathcal{F} \in \text{Ob}C_{\bar{G}}(\Sigma)$.

Un dévissage simple ramène au cas où Σ est réduit. Par [12] et [18], il existe une désingularisation équivariante $\mu : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ telle que $\mathcal{V} = \mu^* \mathcal{F}/T$ soit localement libre où T est le sous faisceau de torsion maximal de $\mu^* \mathcal{F}$.

Il suit qu'il existe deux familles finies $((S_0^\pm, \mathcal{V}_0^\pm), \dots, (S_d^\pm, \mathcal{V}_d^\pm))$ où S_i^\pm est une Γ -variété propre cocompacte avec $\dim S_i^\pm = i$ et \mathcal{V}_i^\pm un faisceau G -équivariant localement libre sur S_i^\pm telles que :

$$\chi_2(\Sigma, \mathcal{F}) = \chi_2(S_d^+, \mathcal{V}_d^+) + \sum_{q=0}^{d-1} \chi_2(S_i^+, \mathcal{V}_i^+) - \chi_2(S_i^-, \mathcal{V}_i^-)$$

Dans le cas où le faisceau équivariant \mathcal{V} est localement libre, si χ est le caractère trivial, le résultat de [1] permet de calculer $\chi_2(\Sigma, \mathcal{V})$. Même si χ

²La découverte de cette fonction \dim_G est due à Murray et Von Neumann.

8 Un théorème de Nakai-Moishezon

n'est pas le caractère trivial, un argument alternatif invoquant le théorème d'indice local de Getzler implique (voir [6] pp. 194-195):

$$\chi_2(\Sigma', \mathcal{V}) = \int_{S'/\Gamma} \text{ch}(\mathcal{V}) \text{Todd}(T_{S'})$$

Pour tout ceci, voir [8] (La théorie d'indice L_2 d'Atiyah [1] ne suffit pas. L'adaptation de [1] dans [7] est insuffisante puisqu'elle se limite au cas où S est projective lisse.).

Il est observé dans [7] que les preuves analytiques des théorèmes d'annulation usuels de la géométrie algébrique complexe (Kodaira-Akizuki-Nakano, Grauert-Riemenschneider, Kawamata-Viehweg, ...) fonctionnent dans le cas de la cohomologie L_2 .

3 Amplitude d'un faisceau inversible projectivement périodique

Soit $L_{G,\chi}(S)$ la sous catégorie pleine de $C_{G,\chi}(\Sigma)$ formée des objets dont le faisceau analytique cohérent sous jacent est inversible. On note $L_G(\Sigma) = \cup_{\chi \in X(S^1)} L_{G,\chi}$, $C_G(\Sigma) = \cup_{\chi \in X(S^1)} C_{G,\chi}$.

Définition 5 Soit (S, O_S) un espace complexe réduit. \mathcal{L} est dit G -nef si et seulement si la classe de cohomologie de \mathcal{L} dans $H^1(S, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ est dans l'adhérence du cône Kähler.

En général \mathcal{L} est dit G -nef sur σ ssi \mathcal{L}_{red} est G -nef sur Σ_{red} .

Définition 6 On suppose $\chi \in \{0, \pm Id\}$. $\mathcal{L} \in Ob(L_G(\Sigma))$ est dit G -ample si et seulement si et pour tout pour tous $\mathcal{F} \in Ob(C_G(\Sigma))$, $\mathcal{N} \in N_G^+(\Sigma)$ et $q > 0$ il existe $N_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Z}$ tel que si $n \geq N_{\mathcal{F}}$ on ait $H_2^q(S, \mathcal{F} \otimes \mathcal{N} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$

Lemme 7 $\mathcal{L} \in Ob(L_G(\Sigma))$ est G -ample ssi $\mathcal{L}_{red} \in Ob(L_G(\Sigma_{red}))$ est G -ample.

Lemme 8 Si \mathcal{L} est un faisceau inversible G -ample, il existe une métrique hermitienne lisse G -invariante sur \mathcal{L} dont la forme de courbure est une forme kählerienne.

Lemme 9 Si \mathcal{L} est G -ample, \mathcal{L} est G -nef.

Lemme 10 Soit Σ est un revêtement galoisien infini d'un espace complexe projectif (S, O_S) . On suppose que $Ob(L_{G,id}) \neq \emptyset$. Soit L un fibré linéaire ample (resp. nef) sur F . Alors, $\pi^* O_S(L)$ est G -ample (resp. G -nef).

Preuve Nous pouvons supposer, par récurrence sur $d = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma$, que, pour tout G, χ -fac \mathcal{F} dont le support est de dimension $< d$, il existe $n_{\mathcal{F}}$ tel que, si $n \geq n_{\mathcal{F}}$ et $q \geq 1$, $H_2^q(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{N} \otimes \pi^* \mathcal{O}(nL)) = 0$, pour tout G, χ -faisceau inversible G -nef \mathcal{N} .

Soit ω_S^{GR} le faisceau canonique de Grauert-Riemenschneider de S . Soit \mathcal{W} un G, χ -fac de support Σ de rang r . Soit H un diviseur de Cartier ample sur S et $\mathcal{L}' \in \text{Ob} L_{G, \chi}$ tels qu'il existe $(\omega_S^{GR}(-H))^{\oplus r} \otimes \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{W}$ un morphisme qui est génériquement un isomorphisme. Cette flèche donne lieu à deux suites exactes,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow (\omega_S^{GR}(-H))^{\oplus r} \otimes \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

\mathcal{C} et \mathcal{K} ont des supports de dimension $< d$.

On invoque le théorème d'annulation de Grauert-Riemenschneider pour déduire que, pour $n \geq n_H$ et $q \geq 1$, $H_2^q(\Sigma, \pi^* \omega_S^{GR}(-H) \otimes \mathcal{N} \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(nL)) = 0$.

La suite exacte longue de cohomologie et l'hypothèse de récurrence pour \mathcal{K} transfèrent l'annulation asymptotique à \mathcal{J} . Le même argument donne que, pour $n \geq n_{\mathcal{W}}$ et $q \geq 1$, $H_2^q(\Sigma, \mathcal{W} \otimes \mathcal{N} \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(nL)) = 0$. Ceci conclut la preuve.

4 Preuve du Théorème 1

4.1 Cas où $[\omega] \in H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{Q}$.

On suppose que $\pi : \Sigma \rightarrow S$ est le revêtement universel d'un espace complexe projectif algébrique compact S de dimension d .

Proposition 11 *Soit $\mathcal{L} \in \text{Ob}(L_{G, \chi}(\Sigma))$. Soit H une section hyperplane de S . On pose $\tilde{H} = H \times_S \Sigma$.*

Supposons que $\mathcal{L}_{H \times_S \Sigma}$ est un objet G -ample de $L_{G, \chi}(\tilde{H})$.

Pour tous $\mathcal{F} \in \text{Ob}(C_G(\Sigma))$, $\mathcal{M} \in N_G^+(\Sigma)$ et $q > 1$ il existe $N_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Z}$ tel que si $n \geq N_{\mathcal{F}}$ on ait $H_2^q(S, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$.

Preuve Fixons $m_0 \in \mathbb{Z}$. Soit s la section tautologique de $\mathcal{O}_S(H)$. On a la suite exacte dans $C_{G, \chi}(\Sigma)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(-H) \xrightarrow{\pi^* s} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_H \rightarrow 0$$

$\mathcal{F}_H = i_* \Phi$ où Φ est un objet de $C_G(\tilde{H})$. Plus généralement on a la suite exacte courte obtenue en tensorisant par $\pi^* \mathcal{O}_S((m+1)H) \otimes \mathcal{N} \otimes \mathcal{L}^n$. Utilisant la suite exacte longue de cohomologie L_2 associée [8] et la définition 6 avec

10 *Un théorème de Nakai-Moishezon*

$\mathcal{N} = \mathcal{M}_H \otimes \pi^* O_H(mH)$, il existe $N_{\mathcal{F}}$ tel que si $n \geq N(m_0, \mathcal{F})$, $m \geq 0$ et $q \geq 2$:

$$H_2^q(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \pi^* O_S(mH) \otimes \mathcal{L}^n) \simeq H_2^q(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \pi^* O_S((m+1)H) \otimes \mathcal{L}^n)$$

Faisant tendre m vers l'infini, en utilisant le lemme 10, il suit que $H_2^q(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $q \geq 2$ et $n \geq N_{\mathcal{F}}$.

Utilisant le théorème de Riemann-Roch pour la cohomologie L_2 [8], suit le:

Corollaire 12 *Si, de plus $\mathcal{L}^d.S > 0$, pour tout \mathcal{F} de $C_G(\Sigma)$ qui n'est pas de torsion, il existe $c > 0$ tel que:*

$$\dim_G H_2^0(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = cn^d + O(n^{d-1})$$

Ici, on peut conclure par le lemme 4 comme à la section suivante. Voici toutefois un argument alternatif.

Le cas particulier $\mathcal{F} = \mu_* \pi^* O_{\hat{S}}(-A)$, avec $\mu : \hat{S} \rightarrow S$ désingularisation, $\hat{\Sigma} = \hat{S} \times_S \Sigma$, A diviseur ample sur $\hat{\Sigma}$, donne lieu à:

Corollaire 13 *Si $n \gg 0$, $H_2^0(\hat{\Sigma}, \mu^* \mathcal{L}^n \otimes \pi^* O_{\hat{S}}(-A)) \neq 0$.*

En particulier, $\mu^ \mathcal{L}$ possède une métrique périodique de courbure supérieure à une classe Kählerienne au sens des courants.*

Corollaire 14 *On suppose de plus que pour tout sous espace propre Z de S , $\mathcal{L}_{Z \times_S \Sigma}$ est G -nef. Alors $\mu^* \mathcal{L}$ est G -nef. En particulier, pour tout $N > 0$ il existe un faisceau d'ideaux de Nadel I_N et n_N sur \hat{S} tel que, quelque soit \mathcal{M} G -nef, $n \geq n_N$ et $q \geq 1$*

$$H_2^q(\hat{\Sigma}, K_{\hat{\Sigma}} \otimes \mu^*(\mathcal{L}^n(-NH) \otimes \mathcal{M}) \otimes \pi^* I_N) = 0$$

Preuve Le premier point est conséquence de [17], Théorème 1.C.3. Le deuxième point résulte de la version L_2 du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg (voir l'exploitation que [7] fait de [3]).

Proposition 15 *Soit $\mathcal{L} \in Ob(L_G(\Sigma))$, tel que, pour tout sous espace analytique de S , $\mathcal{L}^{\dim Z}.Z > 0$. Alors \mathcal{L} est G -ample.*

Preuve Par récurrence sur $d = \dim \Sigma$, on peut supposer que pour tout sous espace propre Z de S , $\mathcal{L}_{Z \times_S \Sigma}$ est G -ample. Alors pour tout G, χ -fac de torsion T , il existe n_T tel que si $n \geq n_T$ et $q \geq 1$ et \mathcal{M} est G -nef, $H_2^q(\Sigma, T \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$.

Le conoyau de $\mu_*(K_{\hat{\Sigma}} \otimes \pi^* I_N) \rightarrow \mu_* K_{\hat{\Sigma}}$ est un faisceau de torsion. Donc, pour tout $N \geq 0$, il existe n_N tel que, si $n \geq n_N$, $q \geq 1$, et \mathcal{M} G -nef:

$$H_2^q(\Sigma, \pi^*(\mu_* K_{\Sigma} \otimes O(-NH)) \otimes \mathcal{L}^n) = 0$$

Soit \mathcal{F} un objet de $C_{G, \chi}(\Sigma)$. On peut trouver une résolution de la forme:

$$0 \rightarrow R^{-d} \rightarrow R^{-d+1} \rightarrow \dots \rightarrow R^0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

Pour $0 \leq i \leq d-1$, R^i est somme directe d'un nombre fini de faisceaux de la forme $\pi^*(\mu_* K_{\hat{\Sigma}} \otimes \pi^* O_S(-NH)) \otimes \mathcal{L}^m$.

Pour calculer la cohomologie L_2 de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n$, on peut utiliser la suite spectrale d'hypercohomologie associé à la résolution précédente. Cette suite spectrale aboutit à $H^*(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n)$ et son terme E_2 vérifie:

$$E_2^{p,q} = H_2^p(\Sigma, R^q \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n)$$

Or le point précédent assure que, si $n \gg 0$, $E_2^{p,q} = 0$ si $p \neq -d$ et $q \neq 0$ ou si $p = -d$ et $q \notin [0, d]$. En particulier $E_2^{p,q} = 0$ si $p + q \geq 1$ et, pour $n \gg 0$ et $k \geq 1$, il suit que $H^k(\Sigma, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$. \mathcal{L} est donc G -ample.

4.2 Cas où $[\omega] \in H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{R}$.

On suppose que $\pi : \Sigma \rightarrow S$ est le revêtement universel d'un espace complexe réduit projectif algébrique compact S de dimension d . Soit $[\omega] \in H^1(S, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ telle que:

- $[\omega]^{\dim Z} \cdot Z > 0$ pour Z un sous espace algébrique de S .
- Il existe une suite d'objets de $L_G(\Sigma)$ $(\mathcal{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite d'entiers positifs $(n_k)_k$ tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} [c_1(\mathcal{L}_k, h_k)]/n_k = [\omega]$.

Lemme 16 *Soit ω_S une forme de Kähler sur S .*

Il existe une suite de réels positifs tendant vers zéro $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et un représentant lisse Δ_k de $[\omega] - [c_1(\mathcal{L}_k)]$ avec $-\delta_k \omega_S \leq \Delta_k \leq \delta_k \omega_S$.

Proposition 17 *$[\omega]$ est une classe de Kähler.*

Preuve Par récurrence sur $d = \dim S$, $[\omega]|_Z$ peut être supposée de Kähler pour tout sous espace propre de S .

Fixons $H \subset S$ une section hyperplane. On peut trouver k_0 tel que, si $k \geq k_0$, $\mathcal{L}_k|_H$ est G -ample et $\mathcal{L}_k^{\dim S} > 0$.

On fixe $O_S(A)$ un diviseur ample sur S muni d'une métrique lisse dont la courbure est la forme de Kähler ω_S .

Par le corollaire 13, il existe $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ tel que pour $k \geq k_0$ on peut trouver une métrique singulière à singularités logarithmiques h_k sur \mathcal{L}_k telle que $\Theta(\mu^*L_k, h_k)/n_k \geq \epsilon\omega_S$ au sens des courants.

Combinant ceci avec le lemme 16, on trouve un représentant big à singularités algébriques de $[\omega]$. Invoquer le lemme 4 termine la preuve.

4.3 Fin de la preuve du Théorème 1

On reprend les notations de l'introduction. Soit $\xi : \Xi \rightarrow \Delta$ une déformation de X .

Soit $O_\Xi(A)$ un faisceau inversible ξ -ample et h une métrique hermitienne lisse sur $O_\Xi(A)$ telle que $C_1(O_\Xi(A), h)$ est lisse et strictement positive sur chaque fibre Ξ_t pour $t \in \Delta$ assez petit.

Soit $(\omega_t)_{t \in \Delta}$ une famille continue de $(1, 1)$ -formes fermées sur Ξ_t avec $[\omega_{\Xi_0}] = [\omega]$ et $(t_n)_n$ une suite convergeant vers 0 telle que :

$$[\omega_{t_n}] \in H^2(\pi_1(\Xi_{t_n}), \mathbb{R})^{1,1} + NS(\Xi_{t_n}) \otimes \mathbb{Q}$$

On suppose que pour tout sous espace analytique fermé $Z \subset X$, $\omega^d \cdot Z > 0$.

Soit $\Upsilon \rightarrow \Delta$ une section hyperplane lisse de $\Xi \rightarrow \Delta$.

Par récurrence sur $\dim_{\mathbb{C}} X$, $[\omega]_{\Upsilon_0}$ est une classe de Kähler sur Υ_0 . En particulier, il existe $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $([\omega] - \epsilon c_1(O_X(A)))|_{\Upsilon_0}$ est une classe de Kähler.

La stricte positivité étant une condition ouverte, il suit qu'existe une fonction ϕ sur Ξ , de classe C^∞ , telle que pour $t \in \Delta$ assez petit $\omega_t - \epsilon c_1(O_{\Xi_t}(A), h) + dd^c \phi_{\Xi_t}$ est une classe de Kähler sur Υ_t .

Quitte à prendre ϵ plus petit, le corollaire 13 implique que $[\omega_{t_n}] - \epsilon c_1(O_{\Xi_{t_n}}(A))$ est représentée par un courant positif fermé défini sur Ξ_{t_n} .

Par une variante aisée du théorème de compacité de Bishop, on peut passer à la limite pour obtenir que $\omega - \epsilon c_1(O_X(A))$ est représentée par un courant positif fermé.

Le théorème de régularisation de Demailly [5] implique que ω est représentée par un courant positif fermé $\geq \frac{\epsilon}{2} c_1(O_X(A), h_X)$ lisse hors d'un ensemble analytique propre. Invoquer le lemme 4 termine la preuve.

References

- [1] M. Atiyah *Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras* Soc. Math. Fr. Astérisque **32-33** (1976) 43-72
- [2] F. Campana, T. Peternell *Algebraicity of the ample cone of projective varieties*, J. reine angew. Math. **407** (1990) 160-166
- [3] J.P. Demailly *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Ec. Norm. Sup. , **15** (1982), 457-511.
- [4] J.P. Demailly *Cohomology of q -convex spaces in top degrees* Math. Z. **204** (1990) 283-295
- [5] J.P. Demailly *Regularization of closed positive currents and intersection theory* J. Alg. Geom. **1** (1992) 361-409
- [6] P. Eyssidieux *La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss-Manin* J. reine angew. Math **490** (1997), 155-212
- [7] P. Eyssidieux *Systèmes adjoints L_2* , à paraître dans Ann. Inst. Fourier **49** (1999)
- [8] P. Eyssidieux *Invariants de Von Neumann des faisceaux cohérents*, Prépublication n. **124** du Laboratoire Emile Picard (Juin 1998), math.AG/9806159.
- [9] M. Gromov *Kähler hyperbolicity and L_2 Hodge theory* Journ. Diff. Geom. **33**, 1991, 263-291
- [10] R. Harvey, H.B. Lawson *An intrinsic characterization of Kähler manifolds* Inv. Math. **74** (1983), 261-295
- [11] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, GTM **52** (1997), Springer
- [12] H. Hironaka *Résolution of singularities over a field of characteristic zero*, Ann. of Math., **79** (1964), 109-326
- [13] S. Kleiman *Towards a numerical theory of ampleness* Annals of Math. **84** (1966) 293-344
- [14] A. Lamari *Courants kähleriens et surfaces compactes*, à paraître dans Ann. Inst. Fourier
- [15] R. Livne *Covers of the universal elliptic curve*, Thèse, Harvard (1981)

- [16] R. Narasimhan *The Levi problem for complex spaces, II* Math. Ann. **146** (1962) 195-216
- [17] M. Paun *Sur l'effectivité numérique des images inverses de fibrés en droites* Math. Ann. **310** (1998) 411-421
- [18] H. Rossi, Rice Univ. Studies **54** (1968), no. **4**, 63-73
- [19] R. Richberg *Stetige streng pseudokonvexe Funktionen* Math. Ann. **175** (1968), 257-268

Philippe Eyssidieux.

CNRS-UMR 5580. Laboratoire Emile Picard.

Université Paul Sabatier, UFR MIG.

118, Route de Narbonne.

31062 Toulouse Cedex (France)

e-mail: eyssi@picard.ups-tlse.fr